质点运动学　　第一节 质点运动的描述（1）

1. 已知运动方程：$x=4t-t^2$，

$t=0$ 时，$x_0=0$；　$t=3\text{s}$ 时，$x=12-9=3\text{m}$，

前 3s 内的位移：$\Delta x=x-x_0=3\text{m}$，　$\Rightarrow$ 前 3s 内位移的大小：$|\Delta x|=3\text{m}$；

质点运动速度：$v_x=\dfrac{dx}{dt}=4-2t$，　$\Rightarrow$ 速率：$|v_x|=\dfrac{ds}{dt}=|4-2t|$，　注意：质点在 $t=2\text{s}$ 后反向运动！

前 3s 内通过的路程：$\Delta s=\int_0^3|v_x|dt=\int_0^3|4-2t|dt=\int_0^2(4-2t)dt+\int_2^3-(4-2t)dt=5\text{m}$.

2. 表达式中位置矢量是：$\vec{r}$，位移矢量是：$\Delta\vec{r}$.

3. 已知运动方程：$\vec{r}=4t^2\vec{i}+(2t+3)\vec{j}$，

$\begin{cases}x=4t^2\\ y=2t+3\end{cases}$　消去时间 t，得轨迹方程：$y=\sqrt{x}+3$；

重点分析：质点沿 x 轴做直线运动，一维运动问题中：

	矢量形式		分量表示		一维运动表示
质点的位置矢量：	$\vec{r}=x\vec{i}$	$\Rightarrow$	$x=x(t)$	$\Rightarrow$	$x=x(t)$
速度：	$\vec{v}=\dfrac{d\vec{r}}{dt}=\dfrac{dx}{dt}\vec{i}=v_x\vec{i}$	$\Rightarrow$	$v_x=\dfrac{dx}{dt}$	$\Rightarrow$	$v=\dfrac{dx}{dt}$
加速度：	$\vec{a}=\dfrac{d\vec{v}}{dt}=\dfrac{dv_x}{dt}\vec{i}=a_x\vec{i}$	$\Rightarrow$	$a_x=\dfrac{dv_x}{dt}=\dfrac{d^2x}{dt^2}$	$\Rightarrow$	$a=\dfrac{dv}{dt}=\dfrac{d^2x}{dt^2}$

一维运动中常把分量 v_x 和 a_x 的下标 x 省去不写，用 v 和 a 表示，此处 v 不是速率；a 不是加速度的大小。用 v 和 a 的正负来表示方向，例如：若 $v>0$，表示沿 x 轴正方向；若 $v<0$，表示沿 x 轴负方向。

4. 已知 $x\sim t$ 曲线，由一维运动速度：$v=\dfrac{dx}{dt}$，对应 $x\sim t$ 曲线上切线的斜率。

瞬时速度为零，即 $v=\dfrac{dx}{dt}=0$，对应在 $x\sim t$ 曲线上切线斜率为零时的位置，由图得，$t=3\text{s}$ 时 $v=\dfrac{dx}{dt}=0$；

由图第 3 秒至第 6 秒间，对应点切线斜率小于零，$v=\dfrac{dx}{dt}<0$（表示速度方向沿 x 轴负方向），且速度大小变大（切线越来越陡峭），说明这段时间内加速度方向与速度方向相同。

5. 已知运动方程：$\vec{r}=at^2\vec{i}+bt^2\vec{j}$，

① $\begin{cases}x=at^2\\ y=bt^2\end{cases}$　消去时间 t，得轨迹方程：$y=\dfrac{b}{a}x$，$(x\geq 0)$　运动轨迹为直线；

② 速度：$\vec{v}=\dfrac{d\vec{r}}{dt}=2at\vec{i}+2bt\vec{j}$，速度随时间变化，非匀速；

③ 加速度：$\vec{a}=\dfrac{d\vec{v}}{dt}=2a\vec{i}+2b\vec{j}$，加速度保持不变，

所以，质点做匀变速直线运动。

6. 位置矢量：$\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}$，　　速度：$\vec{v}=\dfrac{d\vec{r}}{dt}=\dfrac{dx}{dt}\vec{i}+\dfrac{dy}{dt}\vec{j}$，

则速度大小：$v=|\vec{v}|=\sqrt{(\dfrac{dx}{dt})^2+(\dfrac{dy}{dt})^2}$，或 $v=|\vec{v}|=\left|\dfrac{d\vec{r}}{dt}\right|=\dfrac{|d\vec{r}|}{dt}=\dfrac{ds}{dt}$，

重点注意： $|d\vec{r}|=ds$，$dr=d|\vec{r}|$，**但一般情况下** $|d\vec{r}|\neq dr$

选项（A）和（C）相同，$\dfrac{dr}{dt}=\dfrac{d|\vec{r}|}{dt}\neq v$；　　选项（B）：$\dfrac{d\vec{r}}{dt}=\vec{v}$ 表示速度矢量。

7. 根据 $v\sim t$ 曲线，得

$$v=\begin{cases}2t & (0\le t<1)\\ 2 & (1\le t<2)\\ -4t+10 & (2\le t<2.5)\\ -2t+5 & (2.5\le t<3)\\ -1 & (3\le t<4)\\ 2t-9 & (4\le t\le 4.5)\end{cases},$$

速度：$v=\dfrac{dx}{dt}\ \Rightarrow\ dx=vdt\ \Rightarrow\ \int_0^x dx=\int_0^t vdt$，

若 $t_1=2.5\text{s}$ 时，位置为 x_1，则 $\int_0^{x_1}dx=\int_0^{t_1}vdt$，

$$x_1=\int_0^{2.5}vdt=\int_0^1 2tdt+\int_1^2 2dt+\int_2^{2.5}(-4t+10)dt$$

$$=1+2+(-4.5+5)=3.5\text{m},$$

若 $t_2=4.5\text{s}$ 时，位置为 x_2，则 $\int_0^{x_2}dx=\int_0^{t_2}vdt$，

$$x_2=\int_0^{4.5}vdt=3.5+\int_{2.5}^3(-2t+5)dt+\int_3^4-dt+\int_4^{4.5}(2t-9)dt$$

$$=3.5-1.5=2\text{m}.$$

8. 已知加速度：$a=4t$ 和初始条件：$t=0$ 时，$x_0=10$，$v_0=0$，求位置 x 和时间 t 的关系式（运动方程）。

$$a=\frac{dv}{dt}=4t\ \Rightarrow\ dv=4tdt\ \Rightarrow\ \int_{v_0}^v dv=\int_0^t 4tdt\ \Rightarrow\ v-v_0=2t^2,\ \text{其中}\ v_0=0,$$

速度与时间的关系：$v=2t^2$，

$$v=\frac{dx}{dt}=2t^2\ \Rightarrow\ \int_{x_0}^x dx=\int_0^t 2t^2dt\ \Rightarrow\ x-x_0=\frac{2}{3}t^3,\ \text{其中}\ x_0=10$$

位置和时间的关系式：$x=(\dfrac{2}{3}t^3+10)\text{m}$.

9. 已知运动方程：$x=4.5t^2-2t^3$，

（1）$t=1\text{s}$ 时，$x_1=4.5\times1-2\times1=2.5\text{m}$；　$t=2\text{s}$ 时，$x_2=4.5\times4-2\times8=2\text{m}$，

第 2s 内的位移：$\Delta x=x_2-x_1=-0.5\text{m}$ $\Rightarrow$ 第 2s 内的平均速度：$\bar{v}=\dfrac{\Delta x}{\Delta t}=-0.5\text{m/s}$；

（2）瞬时速度：$v=\dfrac{dx}{dt}=9t-6t^2$ $\Rightarrow$ 第2s末的瞬时速度：$v=9\times2-6\times4=-6\,\text{m/s}$；

（3）速率：$|v|=\dfrac{ds}{dt}=\left|9t-6t^2\right|$， 注意：质点在 $t=1.5\text{s}$ 后反向运动！

第2s内的路程：$\Delta s=\int_1^2|v|dt=\int_1^2\left|9t-6t^2\right|dt=\int_1^{1.5}(9t-6t^2)dt+\int_{1.5}^2-(9t-6t^2)dt=\dfrac{9}{4}\text{m}$.

10. 竖直向下为 y 轴正方向，重力加速度：$\vec{a}=g\vec{j}$， 即 $a_x=0$，$a_y=g$，

（1）水平方向匀速运动： $x=v_0t$，

竖直方向匀加速运动： $y=\dfrac{1}{2}gt^2$，

任一时刻 t 的位置坐标 $(v_0t，\dfrac{1}{2}gt^2)$，

$\begin{cases}x=v_0t\\ y=\dfrac{1}{2}gt^2\end{cases}$ 消去时间 t，得轨迹方程：$y=\dfrac{g}{2v_0^2}x^2$，$(x\geq0)$，轨迹为抛物线。

（2）水平方向匀速运动： $v_x=v_0$，

竖直方向匀加速运动： $v_y=gt$，（竖直向下为 y 轴正方向）

子弹在 t 时刻的速度：$\vec{v}=v_0\vec{i}+gt\vec{j}$； $\Rightarrow$ ① 子弹在 t 时刻的速率：$v=\sqrt{v_0^2+g^2t^2}$，

② 子弹在 t 时刻的切向加速度：$a_t=\dfrac{dv}{dt}=\dfrac{g^2t}{\sqrt{v_0^2+g^2t^2}}$；

③ 子弹在 t 时刻的法向加速度： $a_n=\sqrt{a^2-a_t^2}=\sqrt{g^2-\dfrac{g^4t^2}{v_0^2+g^2t^2}}=\sqrt{\dfrac{g^2v_0^2}{v_0^2+g^2t^2}}=\dfrac{gv_0}{\sqrt{v_0^2+g^2t^2}}$.

